第5講　ベクトル

1　△OABの辺OA，AB，BOの各々を $t:1-t$ の比に内分する点をそれぞれP，Q，Rとする．ここで t は $0<t<1$ を満たす実数とする．次の問いに答えよ．

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$，$\overrightarrow{\mathrm{PR}}$ を t，$\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ．

(2)　$\dfrac{|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|}{|\overrightarrow{\mathrm{PR}}|}=\dfrac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$ が t の値によらず成り立つのは△OABがどのような三角形のときか．

【Point Pickup】

< Note >

2 ［1］ 点 O を中心とする円を考える．この円の円周上に 3 点 A，B，C があって $\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{0}$ を満たしている．このとき，三角形 ABC は正三角形であることを証明せよ．

［2］ 空間に相異なる 4 点 O(0, 0, 0)，A(a, 0, 0)，B(0, b, 0)，C(c, c, c) がある．ただし，a，b は正の数とする．4 点 O，A，B，C からの距離が等しい点 P(x, y, z) が xy 平面に関して C と同じ側（xy 平面上は除く）にあるのは，a，b，c にどのような関係があるときか．

【Point Pickup】

＜ Note ＞

3　xyz 空間において，xy 平面上に原点を中心とする半径 2 の円 C がある．また，点 $(0,\ 1,\ 0)$ を通りベクトル $(1,\ 1,\ -2)$ に平行な直線を l とする．この l 上の動点 P から最短距離にある C 上の点を Q とする．点 P が l の全体を動くとき，点 Q が動く範囲を図示せよ．

【Point Pickup】

＜ Note ＞

第5講　ベクトル

[1] △OABの辺OA，AB，BOの各々を $t:1-t$ の比に内分する点をそれぞれP，Q，Rとする．ここで t は $0<t<1$ を満たす実数とする．次の問いに答えよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$，$\overrightarrow{\mathrm{PR}}$ を t，$\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ．

(2) $\dfrac{|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|}{|\overrightarrow{\mathrm{PR}}|}=\dfrac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$ が t の値によらず成り立つのは△OABがどのような三角形のときか．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1-t)\vec{a}+t\vec{b}-t\vec{a}=\boldsymbol{(1-2t)\vec{a}+t\vec{b}}$

$\overrightarrow{\mathrm{PR}}=\overrightarrow{\mathrm{OR}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\boldsymbol{-t\vec{a}+(1-t)\vec{b}}$

(2) $\dfrac{|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|}{|\overrightarrow{\mathrm{PR}}|}=\dfrac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}=k$ とおくと，$k>0$ であり　$|\vec{b}|=k|\vec{a}|$

また $\angle\mathrm{AOB}=\theta$ $(0^\circ<\theta<180^\circ)$ とおくと　$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=k|\vec{a}|^2\cos\theta$

$$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2=|(1-2t)\vec{a}+t\vec{b}|^2=(1-2t)^2|\vec{a}|^2+2t(1-2t)\vec{a}\cdot\vec{b}+t^2|\vec{b}|^2$$

$$=|\vec{a}|^2\{(1-2t)^2+2t(1-2t)k\cos\theta+t^2k^2\}$$

$$|\overrightarrow{\mathrm{PR}}|^2=|-t\vec{a}+(1-t)\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2\{t^2-2t(1-t)k\cos\theta+(1-t)^2k^2\}$$

$\dfrac{|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2}{|\overrightarrow{\mathrm{PR}}|^2}=k^2$ より　$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2=k^2|\overrightarrow{\mathrm{PR}}|^2$　これに上の結果を代入し t について整理すると

$$(4-4k\cos\theta-2k^3\cos\theta-k^4)t^2+(-4+2k\cos\theta+2k^3\cos\theta+2k^4)t+1-k^4=0$$

これが $0<t<1$ である t によらず成り立つのは

$4-4k\cos\theta-2k^3\cos\theta-k^4=0$　……①

かつ　$-4+2k\cos\theta+2k^3\cos\theta+2k^4=0$　……②

かつ　$1-k^4=0$　……③　のとき

③より　$(1+k^2)(1+k)(1-k)=0$　　$k>0$ より　$k=1$　よって　$|\vec{a}|=|\vec{b}|$

このとき①，②はともに $\cos\theta=\dfrac{1}{2}$ となる．よって $\theta=60^\circ$

以上より，題意を満たすのは△OABが**正三角形**のときである．

> **2** ［1］ 点 O を中心とする円を考える．この円の円周上に 3 点 A，B，C があって $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$ を満たしている．このとき，三角形 ABC は正三角形であることを証明せよ．

$|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OC}|=R$ とおく．　$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$　より　$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=-\overrightarrow{OC}$

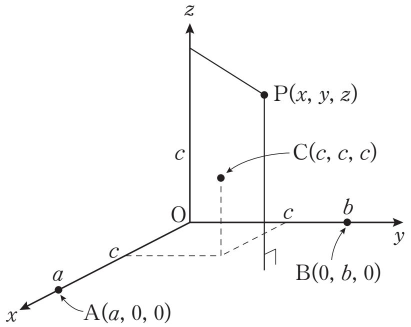
$|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}|^2=|\overrightarrow{OC}|^2$　　$|\overrightarrow{OA}|^2+2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+|\overrightarrow{OB}|^2=|\overrightarrow{OC}|^2$　　$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=-\dfrac{1}{2}R^2$

よって $|\overrightarrow{AB}|^2=|\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}|^2=|\overrightarrow{OB}|^2-2\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OA}+|\overrightarrow{OA}|^2=3R^2$　ゆえに $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{3}\,R$

同様に　$|\overrightarrow{BC}|=|\overrightarrow{CA}|=\sqrt{3}\,R$　　よって　$|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{BC}|=|\overrightarrow{CA}|$ より，△ABC は正三角形である．

> **2** ［2］ 空間に相異なる 4 点 O(0, 0, 0)，A(a, 0, 0)，B(0, b, 0)，C(c, c, c) がある．ただし，a，b は正の数とする．4 点 O，A，B，C からの距離が等しい点 P(x, y, z) が xy 平面に関して C と同じ側（xy 平面上は除く）にあるのは，a，b，c にどのような関係があるときか．

PO＝PA＝PB＝PC より



$x^2+y^2+z^2=(x-a)^2+y^2+z^2$　……①

$x^2+y^2+z^2=x^2+(y-b)^2+z^2$　……②

$x^2+y^2+z^2=(x-c)^2+(y-c)^2+(z-c)^2$　……③

①より　$2ax-a^2=0$　　$a\neq 0$ より　$x=\dfrac{a}{2}$

②より　$2by-b^2=0$　　$b\neq 0$ より　$y=\dfrac{b}{2}$

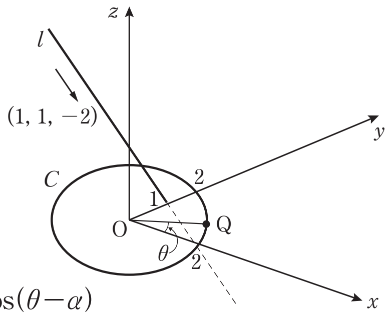
③より　$2cx+2cy+2cz-3c^2=0$　　$2cz=3c^2-(a+b)c$

条件より　$cz>0$　　よって　$c\{3c-(a+b)\}>0$　　$a+b>0$ より　$\boldsymbol{c<0,\ \dfrac{a+b}{3}<c}$

> **3** xyz 空間において，xy 平面上に原点を中心とする半径 2 の円 C がある．また，点 (0, 1, 0) を通りベクトル (1, 1, −2) に平行な直線を l とする．この l 上の動点 P から最短距離にある C 上の点を Q とする．点 P が l の全体を動くとき，点 Q が動く範囲を図示せよ．

$l:(x,\ y,\ z)=(0,\ 1,\ 0)+t(1,\ 1,\ -2)=(t,\ t+1,\ -2t)$　　よって　P$(t,\ t+1,\ -2t)$ と表せる．

また，Q$(2\cos\theta,\ 2\sin\theta,\ 0)$ とおく．



$$PQ^2=(2\cos\theta-t)^2+(2\sin\theta-t-1)^2+(2t)^2$$
$$=4\cos^2\theta-4t\cos\theta+t^2+4\sin^2\theta-4(t+1)\sin\theta+(t+1)^2+(2t)^2$$
$$=-4\{(t+1)\sin\theta+t\cos\theta\}+6t^2+2t+5$$

$\sqrt{(t+1)^2+t^2}=\sqrt{2t^2+2t+1}=r$ とおくと

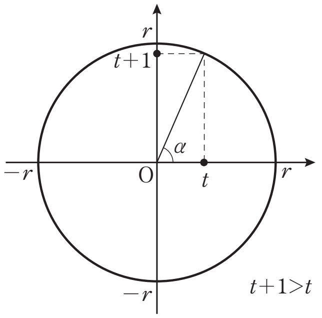
$$(t+1)\sin\theta+t\cos\theta=r\left(\cos\theta\times\frac{t}{r}+\sin\theta\times\frac{t+1}{r}\right)=r\cos(\theta-\alpha)$$

ただし　$\cos\alpha=\dfrac{t}{r}$, $\sin\alpha=\dfrac{t+1}{r}$　$(0\leqq\alpha<2\pi)$

これが最大となるのは　$\cos(\theta-\alpha)=1$

つまり　$\theta-\alpha=0$　より　$\theta=\alpha$のとき

ゆえに　$Q(2\cos\alpha,\ 2\sin\alpha,\ 0)$



また，$t\neq0$のとき　$\tan\alpha=\dfrac{t+1}{t}=1+\dfrac{1}{t}$

$t>0$のとき

　$\cos\alpha>0$，$\sin\alpha>0$，$\tan\alpha>1$　より　$\dfrac{\pi}{4}<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$

$t=0$　のとき

$\cos\alpha=0$，$\sin\alpha=1$　より　$\alpha=\dfrac{\pi}{2}$

$-1<t<0$ のとき

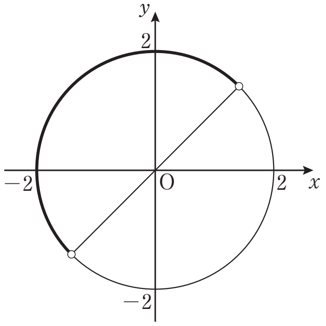
$\cos\alpha<0$，$\sin\alpha>0$，$\tan\alpha<0$ より　$\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$

$t\leqq-1$ のとき

$\cos\alpha<0$，$\sin\alpha\leqq0$，$0\leqq\tan\alpha<1$ より　$\pi\leqq\alpha<\dfrac{5}{4}\pi$

以上より，α のとりうる値の範囲は　$\dfrac{\pi}{4}<\alpha<\dfrac{5}{4}\pi$

よって，点Qの動く範囲は右図太線部分



第５講　ベクトル　練習問題

[1]　点 O を中心とし，半径が r である円に内接する△ABC について，3 辺 AB，BC，CA をそれぞれ 2 : 1 に内分する点を A′，B′，C′ とする．$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とおく．次の問いに答えよ．

(1)　r と内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を用いて $\left|\overrightarrow{\mathrm{OA'}}\right|^2$ を表せ.

(2)　3 点 A′，B′，C′ を通る円の中心が点 O と一致するとき，△ABC が正三角形であることを示せ.

2 座標空間で次の８つの点

A$(-1,\ 1,\ 2)$, B$(-1,\ -1,\ 2)$, C$(1,\ -1,\ 2)$, D$(1,\ 1,\ 2)$

E$(-1,\ 1,\ 0)$, F$(-1,-1,0)$, G$(1,\ -1,\ 0)$, H$(1,\ 1,\ 0)$

を頂点とする１辺の長さ２の立方体 ABCD−EFGH を考える．

いま，点 P$(x,\ y,\ 0)$ を正方形 EFGH 内の点（辺上も含む，ただし P$\neq$G）とし，点 A と点 G を通る直線を l とする．

(1) 点 Q を直線 l 上の点で $\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=t\,\overrightarrow{\mathrm{AG}}$（$t$ は実数）を満たすものとする．$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AG}}$ が直交するとき t を x と y で表せ．

(2) 点 P から直線 l に下ろした垂線の足は点 A と点 G の間にあることを証明せよ．

(3) 点 P が原点 O$(0,\ 0,\ 0)$ を中心とする xy 平面上の半径１の円周上を動くとし，P の座標を $(\cos\theta,\ \sin\theta,\ 0)$ $(0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$ と書くことにする．このとき，三角形 APG の面積の最大値と最小値，およびそれらを与える θ の値を求めよ．

第５講　ベクトル　　練習問題　解答

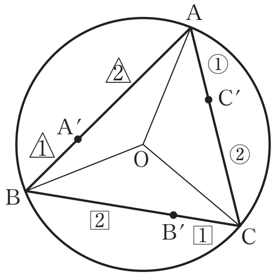
1　点Oを中心とし，半径がrである円に内接する△ABCについて，3辺AB，BC，CAをそれぞれ2：1に内分する点をA′，B′，C′とする．$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$とおく．次の問いに答えよ．

(1)　rと内積$\vec{a}\cdot\vec{b}$を用いて$|\overrightarrow{\mathrm{OA'}}|^2$を表せ．

(2)　3点A′，B′，C′を通る円の中心が点Oと一致するとき，△ABCが正三角形であることを示せ．

解答例

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OA'}}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\dfrac{1}{3}(\vec{a}+2\vec{b})$



$$|\overrightarrow{\mathrm{OA'}}|^2=\frac{1}{9}|\vec{a}+2\vec{b}|^2=\frac{1}{9}(|\vec{a}|^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+4|\vec{b}|^2)$$

$$=\boldsymbol{\frac{1}{9}(5r^2+4\vec{a}\cdot\vec{b})}$$

(2)　(1)と同様に

$$|\overrightarrow{\mathrm{OB'}}|^2=\frac{1}{9}(5r^2+4\vec{b}\cdot\vec{c})\qquad|\overrightarrow{\mathrm{OC'}}|^2=\frac{1}{9}(5r^2+4\vec{c}\cdot\vec{a})$$

3点A′，B′，C′を通る円の中心が点Oと一致するとき　$|\overrightarrow{\mathrm{OA'}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OB'}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OC'}}|$

よって　$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}$

また　$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2=|\vec{b}-\vec{a}|^2=|\vec{b}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{a}|^2=2r^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}$

同様に　$|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|^2=2r^2-2\vec{b}\cdot\vec{c}$　　$|\overrightarrow{\mathrm{CA}}|^2=2r^2-2\vec{c}\cdot\vec{a}$

したがって　$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{CA}}|^2$　　ゆえに　AB＝BC＝CA

よって，△ABCは正三角形である．

2　座標空間で次の8つの点

A$(-1,\ 1,\ 2)$，B$(-1,\ -1,\ 2)$，C$(1,\ -1,\ 2)$，D$(1,\ 1,\ 2)$

E$(-1,\ 1,\ 0)$，F$(-1,-1,0)$，G$(1,\ -1,\ 0)$，H$(1,\ 1,\ 0)$

を頂点とする1辺の長さ2の立方体ABCD−EFGHを考える．

いま，点P$(x,\ y,\ 0)$を正方形EFGH内の点（辺上も含む，ただしP≠G）とし，点Aと点Gを通る直線をlとする．

(1)　点Qを直線l上の点で$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=t\overrightarrow{\mathrm{AG}}$（$t$は実数）を満たすものとする．$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$と$\overrightarrow{\mathrm{AG}}$が直交するとき$t$を$x$と$y$で表せ．

(2)　点Pから直線lに下ろした垂線の足は点Aと点Gの間にあることを証明せよ．

(3)　点Pが原点O$(0,\ 0,\ 0)$を中心とするxy平面上の半径1の円周上を動くとし，Pの座標を$(\cos\theta,\ \sin\theta,\ 0)$ $(0\leqq\theta\leqq 2\pi)$と書くことにする．このとき，三角形APGの面積の最大値と最小値，およびそれらを与えるθの値を求めよ．

解答例

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AG}}=(2,\ -2,\ -2)$ より　$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=t\overrightarrow{\mathrm{AG}}=(2t,\ -2t,\ -2t)$

また，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(x+1,\ y-1,\ -2)$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\overrightarrow{\mathrm{AQ}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(2t-x-1,\ -2t-y+1,\ -2t+2)$$

$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AG}}$ より　$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AG}}=2(2t-x-1)-2(-2t-y+1)-2(-2t+2)=0$

ゆえに　$\boldsymbol{t=\dfrac{x-y+4}{6}}$

(2)　点Pは正方形EFGH内の点であることより，$-1\leqq x\leqq 1$，$-1\leqq y\leqq 1$

よって　$-2\leqq x-y\leqq 2$ より　$\dfrac{1}{3}\leqq t\leqq 1$　　つまり，(1)の点Qは線分AG上にある．

点Qは点Pから直線lに下ろした垂線の足であることより，題意は示された．

(3)　△APGの面積Sは　$S=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{AG}}||\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|=\dfrac{1}{2}\cdot 2\sqrt{3}\cdot|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|=\sqrt{3}\,|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|$

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=-\frac{1}{3}(2x+y-1,\ x+2y+1,\ x-y-2)$$

$$=-\frac{1}{3}(\sin\theta+2\cos\theta-1,\ 2\sin\theta+\cos\theta+1,\ -\sin\theta+\cos\theta-2)$$

$$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2=\frac{1}{9}\{(\sin\theta+2\cos\theta-1)^2+(2\sin\theta+\cos\theta+1)^2+(-\sin\theta+\cos\theta-2)^2\}$$

$$=\frac{2}{3}(\sin\theta-\cos\theta+\sin\theta\cos\theta+2)$$

$\sin\theta-\cos\theta=t$ とおくと　$\sin\theta\cos\theta=\dfrac{-t^2+1}{2}$　　また　$t=\sqrt{2}\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)$ より

$-\sqrt{2}\leqq t\leqq\sqrt{2}$

$$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2=\frac{2}{3}\left(\frac{-t^2+1}{2}+t+2\right)=-\frac{1}{3}(t-1)^2+2$$

よって，Sは$t=1$つまり，$\boldsymbol{\theta=\dfrac{\pi}{2},\ \pi}$ のとき，最大値　$\boldsymbol{\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}=\sqrt{6}}$

$t=-\sqrt{2}$　つまり　$\boldsymbol{\theta=\dfrac{7}{4}\pi}$ のとき，

最小値　$\sqrt{3}\cdot\sqrt{\dfrac{3-2\sqrt{2}}{3}}=\sqrt{3}\cdot\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{3}}=\boldsymbol{\sqrt{2}-1}$ をとる．